CALCOLO DIFFERENZIALE PER LE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Dati una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ e un punto $c \in (a, b)$, nel cap. 1 abbiamo definito il rapporto incrementale di f relativo al punto c, nelle due forme

$r(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ definito in $(a, b) \setminus \{c\}$

$R(h) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ definito in $(a - c, b - c) \setminus \{0\}$

e abbiamo visto che che la funzione f è crescente (risp. decrescente) nel punto c se e solo se $r(x) > 0$ (risp. $r(x) < 0$) in un intorno di c. Ricordiamo inoltre che r e R si ottengono per composizione l'uno dall'altro. Per il teorema sui limiti delle funzioni composte è, quindi, del tutto equivalente calcolare il limite di r al tendere di x a c o il limite di R al tendere di h a 0. Se tale limite è positivo (risp. negativo), per il teorema della permanenza del segno la funzione risulterà crescente (risp. decrescente) nel punto c. Risulta dunque di fondamentale importanza la seguente

DEFINIZIONE. Si dice che f è derivabile nel punto c se il limite del rapporto incrementale ($\lim_{x\to c} r(x)$ oppure $\lim_{h\to 0} R(h)$) esiste ed è finito; in questo caso, tale limite è detto derivata (o derivata prima) di f in c e si denota con $f'(c)$.

Si dice che f è derivabile in (a, b) se lo è in ogni punto. In tal caso, si definisce una funzione $f' : (a, b) \to \mathbf{R}$ che ad ogni punto $x \in (a, b)$ associa la derivata di f in x. Se la funzione f è a sua volta derivabile in c, la sua derivata è detta derivata seconda di f in c e si denota con $f''(c)$, se ciò accade in ogni punto di (a, b) viene definita la funzione derivata seconda $f'' : (a, b) \to \mathbf{R}$ e, procedendo analogamente, si possono definire le derivate di ordine superiore $f''', f^{IV}, \cdots, f^{(n)}, \cdots$

Se il punto c è interno all'intervallo (a, b), è possibile calcolare, ove occorra, i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale: se esistono finiti, essi vengono chiamati rispettivamente derivata sinistra ($f'_-(c)$) e derivata destra ($f'_+(c)$); evidentemente, f è derivabile in c se e solo se $f'_-(c) = f'_+(c)$. Se l'intervallo è chiuso, è possibile prendere in considerazione la derivata anche nei punti a e b: evidentemente, la derivata nel punto a è una derivata destra, la derivata nel punto b è una derivata sinistra.

Il primo risultato che presentiamo mette in relazione la derivabilità e la continuità.

TEOREMA. Se f è derivabile in c, allora è continua in c.

Dimostrazione. Si ha $f(x) = f(x) - f(c) + f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x - c) + f(c)$ e questa quantità, al tendere di x a c, converge a $f'(c) \cdot 0 + f(c) = f(c)$.

Il viceversa non vale, consideriamo i due seguenti esempi.

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $c = 0$. Il rapporto incrementale $r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ diverge al tendere di x a 0.

2) $f(x) = |x|$, $c = 0$. Il rapporto incrementale $r(x) = \frac{|x|}{x}$ vale 1 per $x > 0$ e -1 per $x < 0$ quindi tende ad 1 al tendere di x a 0 da destra e a -1 al tendere di x a 0 da sinistra.

Le funzioni presentate nei precedenti esempi sono continue nel punto $c = 0$ ma non sono derivabili in tale punto.

Il seguente risultato prova che una funzione è derivabile nel punto c se e solo se è possibile approssimarla, in un intorno di c, con un polinomio di primo grado.

TEOREMA. f è derivabile in c se e solo se esiste un polinomio di primo grado p tale che $p(c) = f(c)$ e che $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-p(x)}{x-c} = 0$.

OSSERVAZIONE. La condizione $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-p(x)}{x-c} = 0$ significa che la differenza $f(x) - p(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x - c$, quindi, al tendere di x a c, è trascurabile: dunque, f si può approssimare con il polinomio p.

Dimostrazione. Se f è derivabile in c, basta porre $p(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$. Si ha infatti $\frac{f(x)-p(x)}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) \to 0$. Viceversa, se esiste il polinomio $p = f(c) + a(x - c)$, si ha $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(x)-p(x)+p(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(x)-p(x)}{x-c} + a \to 0 + a = a$ quindi esiste $f'(c) = a$.

La derivata ha un'interessante interpretazione geometrica. Consideriamo la retta che congiunge i punti del grafico $(c, f(c))$ e $(c + h, f(c + h))$, essa è detta secante per il grafico ed ha equazione $s : y = f(c) + \frac{f(c+h)-f(c)}{h}(x - c)$, il suo coefficiente angolare è dunque il rapporto incrementale $R(h)$. Se f è derivabile nel punto c, si ha $\lim_{h\to 0} R(h) = f'(c)$, d'altra parte si ha $\lim_{h\to 0}(c+h) = c$ quindi la retta secante al tendere di h a 0 "tende" ad avere un solo punto a comune con il grafico. Osserviamo anche che il secondo membro dell'equazione di s tende a $f(c) + f'(c)(x - c)$. Per questo motivo, la retta di equazione $t : y = f(c) + f'(c)(x - c)$ è considerata una posizione limite della secante al tendere di x a c, ed è detta tangente al grafico nel punto di ascissa c. In definitiva, se f è derivabile in c, il suo grafico è dotato di retta tangente nel punto di ascissa c. Tenendo conto di questo possiamo allora osservare che approssimare f mediante un polinomio di primo grado equivale, idealmente, a sostituire una porzione del grafico con un segmento di tangente. Si può inoltre far vedere che, se il rapporto incrementale diverge, nel punto di ascissa c il grafico ha tangente verticale: basti pensare, ad esempio, al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ (cfr. cap. 1) in prossimità del punto $x = 0$.

Regole di derivazione. In questo paragrafo vengono presentate le regole per derivare funzioni ottenute mediante operazioni fra funzioni derivabili.

1) Combinazione lineare. Siano f, g derivabili in un punto c e $h, k \in \mathbf{R}$. Indicata con F la combinazione lineare $F(x) = hf(x) + kg(x)$, la funzione F è derivabile nel punto c e si ha $F'(c) = hf'(c) + kg'(c)$.

Infatti, come si vede facilmente, il rapporto incrementale di F è la combinazione lineare dei rapporti incrementali di f e di g mediante le stesse costanti h e k.

2) Prodotto. Siano f, g derivabili in un punto c. Indicata con p la funzione prodotto $p(x) = f(x)g(x)$, la funzione p è derivabile nel punto c e si ha $p'(c) = f(c)g'(c) + f'(c)g(c)$.

Non dimostriamo questo risultato.

3) Reciproco. Sia f derivabile in un punto c e tale che $f(c) \neq 0$. Indicata con F la funzione reciproca $F(x) = \frac{1}{f(x)}$, la funzione F è derivabile nel punto c e si ha $F'(c) = \frac{-f'(c)}{(f(c))^2}$.

Non dimostriamo questo risultato, osserviamo tuttavia che f, essendo derivabile in c, è continua in c, quindi per il teorema della permanenza del segno è diversa da zero in un intorno di c, dunque in tale intorno ha senso prendere in considerazione la funzione F.

4) Quoziente. Siano f, g derivabili in un punto c, e si abbia $g(c) \neq 0$. Indicata con q la funzione quoziente $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, la funzione q è derivabile nel punto c e si ha $q'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$.

Usando la stessa osservazione fatta al punto 3), possiamo concludere che in un intorno di c ha senso prendere in considerazione la funzione q. Per calcolare la derivata scriviamo q nella forma $q(x) = f(x)\frac{1}{g(x)}$ e applichiamo i risultati visti nei punti 2) e 3).

5) Funzione composta. Siano date due funzioni $f : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ e $g : (a, b) \to (\alpha, \beta)$. Sia $c \in (a, b)$ e supponiamo che g sia derivabile nel punto c e che f sia derivabile nel punto $g(c) \in (\alpha, \beta)$. Indicata con F la funzione composta $F(x) = f(g(x))$, la funzione F è derivabile nel punto c e si ha $F'(c) = f'(g(c))\, g'(c)$.

Non dimostriamo questo risultato.

6) Funzione inversa. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente crescente e continua, sappiamo allora che essa è invertibile e la sua inversa è $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ ed è anch'essa strettamente crescente e continua (valgono considerazioni analoghe nel caso in cui f sia strettamente decrescente). Sia $\gamma \in [f(a), f(b)]$, vogliamo sapere se f^{-1} sia derivabile in γ. Sia

$c \in [a, b]$ tale che $\gamma = f(c)$, si supponga che $f'(c) \neq 0$, allora si può dimostrare che f^{-1} è derivabile in γ e $(f^{-1})'(\gamma) = \frac{1}{f'(c)}$.

Non dimostriamo questo risultato.

Derivate delle funzioni elementari. In questo paragrafo presentiamo le formule che permettono di derivare le funzioni elementari presentate nel cap. 1.

a) Funzione costante. Se $f(x) = k \ \forall x \in \mathbf{R}$, il suo rapporto incrementale è nullo quindi $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$.

b) Funzione potenza con esponente intero. Sia $f(x) = x^n$. Si ha $f'(x) = nx^{n-1} \ \forall x \in \mathbf{R}$. Lo proviamo solo nel caso $n = 2$. Il rapporto incrementale è $r(x) = \frac{x^2-c^2}{x-c} = \frac{(x-c)(x+c)}{x-c} = x + c$ il cui limite al tendere di x a c è $2c$, quindi $f'(x) = 2x \ \forall x \in \mathbf{R}$. Se $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ (definita per $x \neq 0$), applicando la regola vista in 3) si trova, per ogni $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$, quindi vale la stessa formula vista nel caso in cui l'esponente sia un intero positivo.

Osserviamo inoltre che, se $f(x) = x^n$, si ha $f'(x) = nx^{n-1}, f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \cdots, f^{(n)}(x) = n!, f^{(k)}(x) = 0$ se $k > n$.

c) Funzione valore assoluto. Come osservato prima, la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile nel punto $x = 0$, mentre, se $x > 0$ si ha $f'(x) = 1$ e se $x < 0$ si ha $f'(x) = -1$. In sostanza, la derivata di f è la cosiddetta funzione segno, definita ponendola uguale ad 1 se $x > 0$ e a -1 se $x < 0$, essa può essere scritta mediante l'espressione $\frac{|x|}{x}$.

Osserviamo che, per la regola 5) precedente, se f è una funzione derivabile e diversa da zero in un punto c, la funzione $F(x) = |f(x)|$ risulta derivabile in c e si ha $F'(c) = \frac{|f(c)|}{f(c)} \ f'(c)$.

d) Funzione esponenziale. Se $f(x) = a^x$ il rapporto incrementale è $r(x) = \frac{a^x-a^c}{x-c} = a^c \ \frac{a^{x-c}-1}{x-c}$ e si può provare che, al tendere di x a c, dato che $x-c$ tende a 0, ha limite $a^c \log a$, quindi si ha $f'(x) = a^x \log a \ \forall x \in \mathbf{R}$. In particolare, se $a = e$, si ha $f'(x) = f(x)$. La funzione esponenziale di base e, dunque, ha la caratteristica di coincidere con la propria derivata.

e) Logaritmo. Possiamo calcolare la derivata usando il rapporto incrementale, ma è interessante utilizzare la regola per la derivata della funzione inversa. Per semplicità, procediamo nel caso $a = e$. Consideriamo la funzione $f :]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ data da $f(x) = e^x$, la cui funzione inversa è $\log x$. Se $\gamma > 0$, sia $c \in \mathbf{R}$ tale che $e^c = \gamma$, ossia $c = \log \ \gamma$. Si ha $f'(c) = e^c \neq 0$, quindi $(f^{-1})'(\gamma) = \frac{1}{e^c} = \frac{1}{\gamma}$. Ne segue che la derivata della funzione $\log x$ è, per ogni $x > 0$, $\frac{1}{x}$. Si prova in modo simile che nel caso generale la derivata della funzione $\log_a x$ è, per ogni $x > 0$, $\frac{1}{x} \log_a \ e$.

Osserviamo poi che, grazie alla regola 5), se f è una funzione derivabile e non nulla, posto $F(x) = \log |f(x)|$, si ha

$$F'(x) = \frac{1}{|f(x)|} \frac{|f(x)|}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

f) Potenza con esponente qualunque. Se $x > 0$, consideriamo $f(x) = x^a = e^{\log x^a} = e^{a \log x}$ da cui $f'(x) = e^{a \log x} a \frac{1}{x} = a \frac{x^a}{x} = a x^{a-1}$. Si ottiene quindi la stessa formula trovata nel caso dell'esponente intero. Abbiamo già visto che la funzione $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ non è derivabile nel punto $x = 0$, e lo stesso si può dire per la funzione x^a con $0 < a < 1$.

g) Funzioni trigonometriche. Consideriamo la funzione $\sin x$ e utilizziamo il rapporto incrementale nella sua seconda forma, come funzione dell'incremento h. Si ha:

$R(h) = \frac{\sin(c+h) - \sin c}{h} = \frac{\sin c \cos h + \cos c \sin h - \sin c}{h} =$

$= \sin c \ \frac{\cos h - 1}{h} + \cos c \frac{\sin h}{h}$

il cui limite è $\cos c$, come si vede tenendo conto dei limiti notevoli $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ e $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. Dunque, se $f(x) = \sin x$, si ha $f'(x) = \cos x \ \forall x \in \mathbf{R}$. In modo simile si prova che se $f(x) = \cos x$, si ha $f'(x) = -\sin x \ \forall x \in \mathbf{R}$. Infine, se $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, applicando la regola 4) si ottiene $f'(x) = \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

h) Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche.

Utilizzando la regola di derivazione delle funzioni inverse si può provare che, se $f(x) = \arcsin x$, si ha $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ per ogni $x \in]-1, 1[$; se $f(x) = \arccos x$, si ha $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ per ogni $x \in]-1, 1[$ (questo si poteva ottenere anche ricordando che $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$). Proveremo che queste due funzioni non sono derivabili nei punti -1 e 1.

Infine, se $f(x) = \arctan x$, si ha $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ per ogni $x \in]-\infty, +\infty[$. Infatti, se $\gamma \in]-\infty, +\infty[$, si ha $\gamma = \tan c$ per qualche $c \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La derivata di $\tan x$ in c è $1 + \tan^2 c \neq 0$ quindi $f'(\gamma) = \frac{1}{1+\tan^2 c} = \frac{1}{1+\gamma^2}$.

Teoremi sul calcolo differenziale e loro applicazioni allo studio delle funzioni. Studiare una funzione significa individuare, a partire dalla legge di definizione, le sue principali proprietà analitiche: limitatezza, continuità, derivabilità, monotonia, convessità, ecc. Per individuare alcune di queste proprietà sarà molto utile lo studio delle derivate. Il primo risultato che presentiamo è legato al Teorema di pag. 13 del cap. 1, secondo il quale la funzione è crescente (decrescente) in c se e solo se $r(x) > 0$ ($r(x) < 0$) in un intorno di c. Se $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), allora, per il teorema della permanenza del segno si avrà $r(x) > 0$ ($r(x) < 0$) in un intorno di c. Ne segue:

TEOREMA 1(di monotonia locale). Se $f'(c) > 0$ (risp. $f'(c) < 0$) allora f è crescente (risp. è decrescente) nel punto c.

Il viceversa non è vero, ad esempio la funzione $f(x) = x^3$ è crescente nel punto $c = 0$ ma $f'(0) = 0$. Possiamo solo affermare che, se f è crescente (decrescente) in c, allora $f'(c) \geq 0$ ($f'(c) \leq 0$).

Per avere dei risultati più raffinati, occorre presentare alcuni importanti teoremi.

TEOREMA DI FERMAT. Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, sia $c \in]a, b[$ un punto di minimo o di massimo relativo per f. Si supponga che f sia derivabile nel punto c. Allora, si ha $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Dato che il punto c è interno, la derivata è il limite del rapporto incrementale sia da sinistra che da destra. Ora, il numeratore del rapporto incrementale in un intorno di c ha sempre lo stesso segno (ad esempio, se c è un punto di minimo relativo, si ha $f(x)-f(c) \geq 0$ in un intorno di c) mentre il denominatore è negativo a sinistra di c e positivo a destra. Ne segue che $f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x\to c^-} r(x) \leq 0$ e, contemporaneamente, $f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x\to c^+} r(x) \geq 0$ quindi necessariamente $f'(c) = 0$.

Il viceversa di questo teorema non vale: consideriamo, ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$, si ha $f'(0) = 0$ ma il punto $c = 0$ non è di estremo relativo, infatti f è crescente in ogni punto di $\mathbf{R}$. Dunque, il fatto che $f'(c) = 0$ è una condizione necessaria, ma non sufficiente, per l'esistenza di un estremo relativo. I punti c tali che $f'(c) = 0$ sono detti punti stazionari o critici per f.

TEOREMA DI ROLLE. Sia f una funzione reale continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, tale che $f(a) = f(b)$. Allora, esiste $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass f è dotata di minimo e massimo assoluti, siano x_1 il punto di minimo assoluto e x_2 il punto di massimo assoluto. Se $x_1 = a$ e $x_2 = b$, o viceversa, allora il minimo e il massimo assoluti della funzione sono uguali quindi f è costante e la sua derivata è ovunque nulla. In caso contrario, uno dei due punti x_1, x_2 è interno, in esso allora la derivata è nulla per il teorema di Fermat.

TEOREMA DI LAGRANGE. Sia f una funzione reale continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora, esiste $c \in]a, b[$ tale che $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Dimostrazione. Consideriamo in $[a, b]$ la funzione $g(x) = (f(b)-f(a))x + (a - b)f(x)$. Si vede facilmente che essa verifica le ipotesi del teorema di Rolle, quindi esiste $c \in]a, b[$ tale che $g'(c) = 0$. Dal fatto che $g'(x) = f(b) - f(a) + (a - b)f'(x)$ segue subito la tesi.

COROLLARI DEL TEOREMA DI LAGRANGE.

A) *Teorema di prolungamento della derivata.* Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ e sia $c \in (a, b)$. Supponiamo che f sia derivabile in $(a, b) \setminus \{c\}$ e che sia continua in c. Supponiamo inoltre che esista il $\lim_{x \to c} f'(x)$, sia esso l (può essere un numero oppure $\pm\infty$). Allora, si ha $\lim_{x \to c} r(x) = l$.

OSSERVAZIONE. Dal teorema appena enunciato segue che le funzioni $\arcsin x$ e $\arccos x$ non sono derivabili in -1 e 1, infatti sono continue ma le loro derivate divergono al tendere di x a tali punti.

B) *Criterio di monotonia.* Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabile. Condizione sufficiente affinché f sia crescente in (a, b) è che $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$.

Dimostrazione. Siano $x, y \in (a, b)$, con $x < y$. Applicando il Teorema di Lagrange ad f nell'intervallo $[x, y]$, si ottiene che esiste $c \in]x, y[$ tale che $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) \geq 0$, da cui la tesi.

Dal teorema B) segue subito che, se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è strettamente crescente in (a, b). Questa condizione è comunque troppo restrittiva, basti pensare che la funzione $f(x) = x^3$ non la verifica pur essendo strettamente crescente. Si ha tuttavia il seguente risultato più generale, del quale non diamo la dimostrazione.

C) *Criterio di stretta monotonia.* Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabile. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia strettamente crescente in (a, b) è che $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$ e che non esista nessun intervallo $(c, d) \subseteq (a, b)$ tale che $f'(x) = 0 \ \forall x \in (c, d)$.

D) *Teorema sulle funzioni con derivata nulla.* Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabile, tale che $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$. Allora, f è costante in (a, b).

Dimostrazione. Siano x, y due punti generici di (a, b), con $x < y$. Applicando il Teorema di Lagrange ad f nell'intervallo $[x, y]$ (le ipotesi sono verificate in quanto f è derivabile in (a, b)) si ottiene l'esistenza di $c \in]x, y[$ tale che $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$, quindi $f(x) = f(y)$ e, dato che x e y sono arbitrari, ne segue la tesi.

Nel Teorema D) l'ipotesi che f sia definita in un intervallo è fondamentale. Ad esempio, la funzione definita in $[0, 1] \cup [4, 5]$ ponendo $f(x) = 2$ in $[0, 1]$ e $f(x) = 6$ in $[4, 5]$ ha derivata nulla in tutto il suo insieme di definizione ma non è costante.

Metodo per lo studio dei punti stazionari. Sia f una funzione derivabile in (a, b) e sia $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$. Dai risultati precedenti segue che c può essere un punto di estremo relativo. Tenendo presenti i criteri di monotonia visti prima, segue che:

i) se $f'(x) < 0$ in un intorno sinistro di c e $f'(x) > 0$ in un intorno destro di c, allora c è un punto di minimo relativo per f.

ii) se $f'(x) > 0$ in un intorno sinistro di c e $f'(x) < 0$ in un intorno destro di c, allora c è un punto di massimo relativo per f.

In pratica, un punto stazionario c è un punto di estremo relativo per f se in corrispondenza di c la derivata cambia segno. Se esiste la derivata seconda in c, possiamo raffinare lo studio anche utilizzando il segno della derivata seconda, precisamente si ha:

iii) se $f''(c) > 0$, allora c è un punto di minimo relativo per f.

iv) se $f''(c) < 0$, allora c è un punto di massimo relativo per f.

Infatti, dato che $f''(c)$ è la derivata della funzione f' nel punto c, se $f''(c) > 0$ la funzione f' è crescente nel punto c, in cui vale zero, quindi si avrà $f'(x) < 0$ in un intorno sinistro di c e $f'(x) > 0$ in un intorno destro di c, e dal risultato i) ne segue che c è un punto di minimo relativo per f. Allo stesso modo si prova iv).

In definitiva: se $f'(c) \neq 0$, la funzione f è crescente o decrescente nel punto c; se $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$, c è un punto di estremo relativo per f.

Metodo per la ricerca degli estremi assoluti. Sia f una funzione reale continua in $[a, b]$, il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza degli estremi assoluti. Per individuarli, occorre determinare i seguenti insiemi:

$A = \{c \in]a, b[\, : f'(c) = 0\}$

$B = \{c \in]a, b[\, : \nexists f'(c)\}$

$C = \{a; b\}$

in quanto, se un punto di estremo assoluto appartiene all'interno di $[a, b]$, in tale punto la derivata, se esiste, è nulla per il teorema di Fermat: pertanto, i punti di estremo assoluto andranno cercati o all'interno dell'intervallo, e in tal caso la derivata o non esiste oppure esiste e vale zero, oppure agli estremi dell'intervallo. Un volta determinati i tre insiemi A, B, C, basta calcolare i valori della funzione in tutti i punti di tali insiemi per trovare il minimo e il massimo.

Funzioni localmente convesse. Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile e sia $c \in (a, b)$, ricordiamo che l'equazione della tangente al grafico di f nel punto di ascissa c è $y = f(c) + f'(c)(x - c)$. La tangente divide il piano in due semipiani, chiamiamo semipiano superiore l'insieme $\overline{S} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq f(c) + f'(c)(x - c)\}$, analogamente si definisce il semipiano inferiore che indicheremo con $\underline{S}$. Si dice che la funzione f è convessa nel punto c se esiste $r > 0$ tale che, se $x \in]c - r, c + r[$ si ha $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$, ossia se per tutti i punti di un opportuno intorno di c il corrispondente punto del grafico appartiene a $\overline{S}$. In modo simile si definisce f concava nel punto c se per tutti i punti di un opportuno intorno di c il corrispondente punto del grafico appartiene a $\underline{S}$. Se f in c non è né convessa né concava, si dice che c è un punto di flesso per f; hanno particolare interesse i punti di flesso per i quali se $x \in]c-r, c[$ il corrispondente punto del grafico appartiene a $\overline{S}$ e se $x \in]c, c+r[$ il corrispondente punto del grafico appartiene a $\underline{S}$, o viceversa (punti di flesso proprio).

Si può dimostrare che f è convessa (risp. concava) in (a, b) se e solo se lo è in ogni punto, quindi lo studio della convessità puntuale è utile per riconoscere se f è convessa in (a, b) (proprietà, questa, molto significativa soprattutto nei problemi di ricerca del minimo e del massimo). Presentiamo a tale proposito il seguente risultato, ne sussiste uno simmetrico per la concavità.

TEOREMA. Sia f una funzione derivabile in (a, b) e sia $c \in (a, b)$ tale che esista $f''(c) > 0$. Allora, f è convessa in c.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che in un opportuno intorno di c si ha $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$. Consideriamo allora in (a, b) la funzione $F(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$, basterà provare che $F(x) \geq 0$ in un intorno di c. Si ha $F(c) = 0$, osserviamo inoltre che esiste $F'(x) = f'(x) - f'(c)$, quindi $F'(c) = 0$, e che esiste $F''(c) = f''(c)$. F ha, dunque, in c un minimo relativo, dunque esiste un intorno di c in tutti i punti del quale si ha $F(x) \geq F(c) = 0$, come si voleva.

Allo stesso modo si prova che, se esiste $f''(c) < 0$, f è concava in c. Ne segue che, se esiste la derivata seconda in tutto l'intervallo (a, b), gli eventuali punti di flesso vanno cercati fra i punti c tali che $f''(c) = 0$ e in tal caso si ha un flesso proprio se $f''(x) < 0$ in un intorno sinistro di c e $f''(x) > 0$ in un intorno destro di c, o viceversa.

Il seguente risultato, del quale non vedremo la dimostrazione, fornisce un'applicazione del calcolo differenziale al calcolo di alcuni limiti. Lo enunciamo, per fissare le idee, solo nel caso in cui $x \to c$ ma si può enunciare in modo simile nel caso in cui $x \to \pm\infty$.

TEOREMA DI DE L'HOPITAL. Siano f, g due funzioni reali derivabili in $(a, b) \setminus \{c\}$ tali che:

i) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$

ii) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b) \setminus \{c\}$

iii) esiste il $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (l \in \mathbb{R}$ oppure $l = \pm\infty)$

Allora, si ha:

j) $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b) \setminus \{c\}$

jj) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Esempi. a) Si voglia calcolare il $\lim_{x\to 0} x \log x$, che si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Si ha

$$x \log x = \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

in questo modo abbiamo espresso la funzione nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Il rapporto delle derivate è

$$\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \to 0$$

quindi possiamo concludere che il limite richiesto vale zero. Ne segue che $\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x \log x} = e^0 = 1$, per cui la discontinuità nel punto $x = 0$ della funzione x^x è eliminabile.

b) Il teorema di de l'Hopital può essere utile anche nella ricerca degli asintoti obliqui. Supponiamo infatti che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ e che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \in R$, allora si avrà $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} = m$ e in questo modo si determina subito il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo.

Osserviamo che in alcuni casi l'utilizzo del Teorema di de l'Hopital è inutile o inopportuno. Consideriamo a tale proposito i seguenti esempi:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Il rapporto delle derivate tende ad 1 ma non è opportuno applicare il teorema in quanto, per calcolare la derivata di $\sin x$, era già necessario conoscere tale limite.

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{3^x}$. Il limite vale zero, come si vede subito riscrivendo la funzione nella forma $\left(\frac{2}{3}\right)^x$. Il rapporto delle derivate invece non è di nessun aiuto in quanto vale $\frac{2^x}{3^x} \frac{\log 2}{\log 3}$.

Precisiamo infine che in alcuni casi il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ esiste anche se non esiste il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$: il teorema fornisce dunque una condizione sufficiente ma non necessaria. Consideriamo ad esempio, per $x \to 0$, la coppia di funzioni $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x$. Il loro rapporto è $x \sin \frac{1}{x}$ che tende a zero. Il rapporto delle derivate è $2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, che al tendere di x a 0 non è regolare.